ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

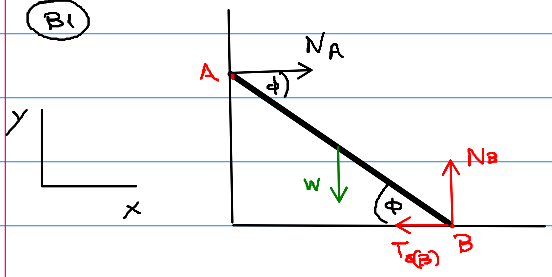
ΘΕΜΑ Α

A1 → γ , A2 → δ , A3 → γ , A4 → β

A5 α Σ, β Λ, γ Σ, δ Σ, ε Λ

ΘΕΜΑ Β

B1



Για να μην ολισθήσει πρέπει

$T_{σ(B)} \le T_{op} \Leftrightarrow T_{σ(B)} \le \mu \cdot N_B \; (1)$

$Στ_{(B)} = 0 \Leftrightarrow τ_{N_A} = τ_w \Leftrightarrow$

$N_A \cdot \ell \cdot ημφ = w \cdot \frac{\ell}{2} \cdot συνφ \Leftrightarrow$

$N_A \cdot ημφ = \frac{w}{2} \cdot συνφ \; (2)$

$ΣF_x = 0 \Leftrightarrow N_A = T_{σ(B)} \; (3)$

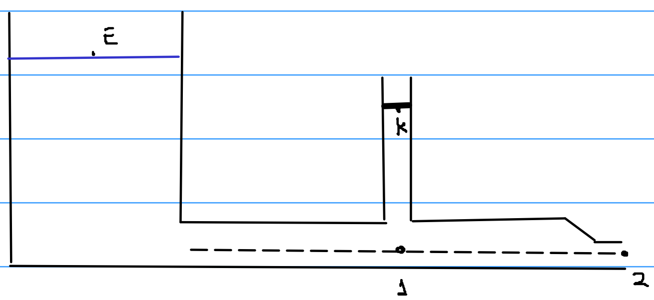
$ΣF_y = 0 \Leftrightarrow N_B = w \; (4)$.

$(1) \overset{(3)}{\underset{(4)}{\Rightarrow}} N_A \le \mu \cdot w \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{w}{2} \cdot \frac{συνφ}{ημφ} \le \mu \cdot w \Leftrightarrow \frac{1}{2\mu} \le \frac{ημφ}{συνφ} \Leftrightarrow$

$εφφ \ge \frac{1}{2\mu} \; (5)$

Σωστή η (ii).

B2



$P_1 = P_K + \rho g h$ (1).

$P_K = \frac{W}{A} + P_{ατμ}$ (2).

$((1),(2)) \Rightarrow \quad P_1 = \frac{W}{A} + P_{ατμ} + \rho g h$ (3).

Bernoulli από (1) μέχρι (2): $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ (4).

εξίσωση συνέχειας για τα (1) κ' (2): $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \Leftrightarrow$

$2A_2 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \Leftrightarrow \quad v_2 = 2v_1$ (5)

$(4) \xrightarrow[P_2 = P_{ατμ}]{(5)} \quad P_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{v_2}{2}\right)^2 = P_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Leftrightarrow P_1 = P_{ατμ} + \frac{3}{8}\rho v_2^2$ (6)

Bernoulli από Ε μέχρι (2): $P_E + \frac{1}{2}\rho v_E^2 + \rho g H = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ (7)

Είναι $P_E = P_2 = P_{ατμ}$, $v_E \simeq 0$ οπότε η (7) δίνει:

$\rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Leftrightarrow v_2^2 = 2gH$ (8).

Αντικαθιστούμε στην (6) την (8) και προκύπτει:

$P_1 = P_{ατμ} + \frac{3}{8}\rho \cdot 2gH \Leftrightarrow P_1 = P_{ατμ} + \frac{3}{4}\rho g H$ (9).

Τέλος, αντικαθιστούμε την (9) στην (3) και προκύπτει:

$\cancel{P_{ατμ}} + \frac{W}{A} + \rho g h = \cancel{P_{ατμ}} + \frac{3}{4}\rho g H \overset{h=\frac{H}{4}}{\Longleftrightarrow} \frac{W}{A} + \rho g \frac{H}{4} = \frac{3}{4}\rho g H \Leftrightarrow$

$\frac{W}{A} = \frac{2}{4}\rho g H \Leftrightarrow \boxed{W = \frac{\rho g H A}{2}}$

Σωστή η επιλογή ί

B3

Κινητική ενέργεια του συσσωματώματος: $K_\Sigma = \frac{1}{2}(m_1 + m_3)V^2$ (1)

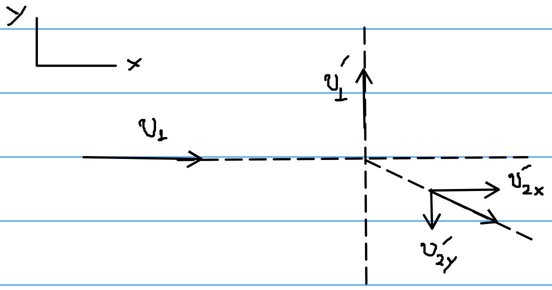
Αρχική κινητική ενέργεια της Σ_1: $K_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2$ (2)

Για το λόγο τους, έχουμε:

$$\frac{K_\Sigma}{K_1} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(m_1 + m_3)V^2}{\cancel{\frac{1}{2}} m_1 v_1^2} = \frac{(m+m)V^2}{m v_1^2} \Leftrightarrow \frac{K_\Sigma}{K_1} = \frac{2 \cdot V^2}{v_1^2} \quad (3)$$

Αρκεί να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ των V κ' v_1.

ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΤΩΝ m_1 κ' m_2



Διατήρηση της ορμής στη διεύθυνση x: $m_1 v_1 = m_2 v_{2x}' \Leftrightarrow$

$$m \cdot v_1 = 2m \cdot v_2' \,\text{συν}30^\circ \Leftrightarrow$$

$$v_1 = 2 v_2' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$v_1 = v_2' \sqrt{3} \quad (4)$$

Διατήρηση της ορμής στη διεύθυνση y: $0 = m_1 \cdot v_1' - m_2 \cdot v_{2y}' \Leftrightarrow$

$$m_2 v_{2y}' = m_1 v_1' \Leftrightarrow$$

$$2m\, v_2' \cdot \text{ημ}30^\circ = m\, v_1' \Leftrightarrow$$

$$2 v_2' \cdot \frac{1}{2} = v_1' \Leftrightarrow$$

$$v_1' = v_2' \quad (5).$$

$((4),(5)) \Rightarrow \quad v_1 = v_1' \sqrt{3} \quad (6).$

Διατήρηση της ορμής του συστήματος των m_1 κ' m_3 κατά τη διάρκεια της πλαστικής κρούσης:

$$m_1 \cdot v_1' = (m_1 + m_3) \cdot V \Leftrightarrow m \cdot v_1' = 2m \cdot V \Leftrightarrow v_1' = 2 \cdot V \overset{(6)}{\Leftrightarrow} \frac{v_1}{\sqrt{3}} = 2V \Leftrightarrow$$

$$v_1 = 2\sqrt{3}\, V \quad (7).$$

Τέλος, αντικαθιστούμε την (7) στην (3) και προκύπτει:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{2 \cdot V^2}{4 \cdot 3 \cdot V^2} = \frac{1}{6}$$

Σωστή η επιλογή iii.

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Γ}}$

Γ1 Μέση ισχύς στον R_1: $\bar{P}_1 = \dfrac{V_{εν}^2}{R_1} \Leftrightarrow 12 = \dfrac{V_{εν}^2}{6} \Leftrightarrow V_{εν}^2 = 72 \Leftrightarrow V_{εν} = 6\sqrt{2}$ Volt.

Είναι $V_{εν} = \dfrac{V}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 6\sqrt{2} = \dfrac{V}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{V = 12 \text{ Volt}}$

$$I_{εν} = \frac{V_{εν}}{R_1} = \frac{6\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow \boxed{I_{εν} = \sqrt{2}\ A}$$

Γ2 Για τη στιγμιαία ισχύ στον R_1, είναι: $P_1 = \dfrac{(v')^2}{R_1}$ (1)

Αφού διπλασιάσαμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου (με τα N, B κ' A να διατηρούνται) διπλασιάζεται και το πλάτος της τάσης.

Δηλαδή είναι $V' = 2V = 24$ Volt.

Έτσι, η εξίσωση της εν. τάσης είναι: $v' = 24 \cdot ημ 100πt$.

Αντικαθιστούμε $t = 5 \cdot 10^{-3}$ sec και προκύπτει:

$$v' = 24 \cdot ημ(100π \cdot 5 \cdot 10^{-3}) = 24 \cdot ημ\frac{π}{2} = 24 \Rightarrow v' = 24 \text{ Volt}.$$

Τέλος, από (1) ⇒ $P_1 = \frac{\cancel{24}^{\,4} \cdot 24}{\cancel{6}} = 96 \Rightarrow \boxed{P_1 = 96\ \text{Watt}}$

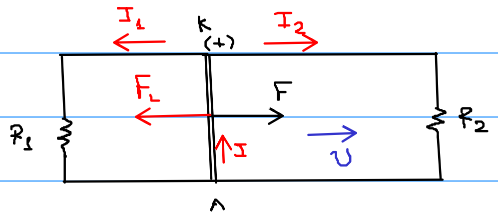
Γ3 Εξαιτίας της σταθερής δύναμης F, ο αγωγός ΚΛ αποκτά σταθερή επιτάχυνση $a = \frac{F}{m} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \Rightarrow a = 1\,\frac{m}{s^2}$, μέχρι τη χρονική στιγμή 2s.

(Σχόλιο: Από $t_0 = 0$ μέχρι 2s, οι διακόπτες $δ_2$ κ $δ_3$ είναι ανοικτοί και το κύκλωμα δεν διαρρέεται από ρεύμα με αποτέλεσμα να μην υπάρχει δύναμη Laplace σε αυτή τη διάρκεια)

Τη στιγμή $t = 2s$ ο αγωγός έχει αποκτήσει ταχύτητα
$υ = a \cdot t = 1 \cdot 2 \Rightarrow υ = 2\,\frac{m}{s}$

Στα άκρα του αγωγού υπάρχει τάση από επαγωγή με τιμή $E_{επ} = B \cdot υ \cdot \ell$ (2).

Τη στιγμή $t = 2s$ που κλείνουμε τους διακόπτες, δημιουργείται κλειστό κύκλωμα και λόγω της $E_{επ}$, ο αγωγός ΚΛ και οι αντιστάτες R_1 κ R_2 αρχίζουν να διαρρέονται από ρεύμα.



Αφού ο αγωγός κινείται με σταθερή ταχύτητα, ισχύει $ΣF = 0 \Leftrightarrow$
$F = F_L \Leftrightarrow F = B \cdot I \cdot \ell$ (3).

Αρκεί να υπολογίσουμε το ρεύμα I που διαρρέει τον ΚΛ.

Είναι $I = \frac{E_{επ}}{R_{ολ}} \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} I = \frac{B\, υ \cdot \ell}{R_{ολ}}$ (4)

$R_{ολ} = R_{ΚΛ} + R_{1,2}$ (5)

$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow R_{1,2} = 2\,Ω$

(5) $\Rightarrow R_{ολ} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow R_{ολ} = 4\,Ω$.

Αντικαθιστούμε στην (3) και προκύπτει:

$$0,5 = B \cdot \frac{B \cdot 2 \cdot 1}{4} \cdot 1 \Leftrightarrow B^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{B = 1T}$$

Γ4) Έστω n το ζητούμενο ποσοστό.

Είναι $n = \frac{Q_2}{W_F} \cdot 100\%$.

Αρκεί να υπολογίσουμε τα Q_2 κ. W_F.

Η αντίσταση R_2 διαρρέεται από το σταθερό ρεύμα I_2, στη χρονική διάρκεια $t_1 = 2s$ μέχρι $t_2 = 5s$.

Αρκεί να υπολογίσουμε το I_2.

Είναι $I_2 = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{V_{K\Lambda}}{R_2} = \frac{E_{en} - I \cdot R_{K\Lambda}}{R_2}$ (6)

$(2) \Rightarrow E_{en} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \rightarrow E_{en} = 2V$

$(4) \Rightarrow I = \frac{2}{4} = 0,5 \Rightarrow I = 0,5A$

$(6) \Rightarrow I_2 = \frac{2 - 0,5 \cdot 2}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{3}A$

Επομένως: $Q_2 = I_2^2 \cdot R_2 \cdot \Delta t = \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot 3 = 1 \Rightarrow \boxed{Q_2 = 1J}$

Για το έργο της F, επειδή είναι σταθερή και ασκείται σε σώμα που κινείται ευθύγραμμα, ισχύει:

$W_F = F \cdot \Delta x_{ολ}$ (7)

$\Delta x_{ολ} = \underbrace{\Delta x_1}_{\text{από } 0-2s} + \underbrace{\Delta x_2}_{\text{από } 2s-5s}$ (8).

$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2 \Rightarrow \Delta x_1 = 2m$

$\Delta x_2 = v \cdot \Delta t_2 = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow \Delta x_2 = 6\,m.$

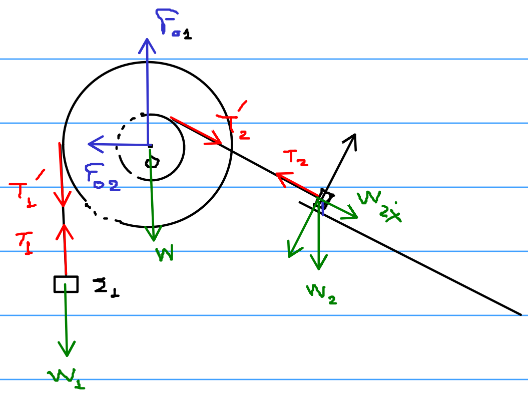
$(8) \Rightarrow \quad \Delta x_{o_1} = 8\,m.$

$(7) \Rightarrow \quad W_F = 0,5 \cdot 8 = 4 \Rightarrow W_F = 4\,J$

Τέλος $\quad n = \frac{1}{4} \cdot 100\,\% \Rightarrow \boxed{n = 25\,\%}$

ΘΕΜΑ Δ

(Δ1)



Ισορροπία $Σ_1$: $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow$

$T_1 = W_1 \Leftrightarrow T_1 = m_1 \cdot g \;(1)$

Ισορροπία τροχαλίας: $\Sigma \tau_{(o)} = 0 \Leftrightarrow$

$\tau_{T_1'} = \tau_{T_2'} \Leftrightarrow T_1' \cdot 2r = T_2' \cdot r \Leftrightarrow$

$T_2' = 2 \cdot T_1' \;(2)$

Ισορροπία $Σ_2$: $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow T_2 = W_{2x} \Leftrightarrow T_2 = m_2 g \cdot ημφ \Leftrightarrow$

$T_2 = 5 \cdot 10 \cdot 0,6 \Rightarrow T_2 = 30\,N$

Αβαρή τα νήματα $\Leftrightarrow T_1' = T_1$ κ $T_2' = T_2$.

Έτσι, από $(1) \xrightarrow{(2)} \frac{T_2}{2} = m_1 \cdot g \Leftrightarrow \frac{30}{2} = m_1 \cdot 10 \Leftrightarrow \boxed{m_1 = 1,5\,kg}$

Για την τροχαλία

Στην κατακόρυφη διεύθυνση: $F_{o1} = W + T_1' + T_{2y}' \Leftrightarrow$

$F_{o1} = W + T_1 + T_2 \cdot ημφ \Leftrightarrow$

$F_{o1} = 15 + 15 + 18 \Leftrightarrow \boxed{F_{o1} = 48\,N}$

Στην οριζόντια διεύθυνση:

$F_{o2} = T_{2x}' \Leftrightarrow F_{o2} = T_2 \cdot συνφ$

$F_{o2} = 30 \cdot 0,8 \Leftrightarrow \boxed{F_{o2} = 24\,N}$

Επομένως, για το μέτρο της δύναμης F_o από τον άξονα,

είναι $F_o = \sqrt{F_{o1}^2 + F_{o2}^2} = \sqrt{(48)^2 + (24)^2} = \sqrt{(24 \cdot 2)^2 + (24)^2}$

$$\boxed{F_o = 24\sqrt{5}\ N}$$

Δ2 Ο χρόνος κίνησης (t_2) από το Γ μέχρι το Δ είναι ίσος με το χρόνο κίνησης (t_3) του $Σ_3$ από τη θέση που ήταν τη στιγμή που κόπηκε το νήμα μέχρι το Δ.

Το $Σ_2$ εκτελεί ευθ. ομαλή κίνηση.

Είναι $t_2 = \frac{(ΓΔ)}{υ_2} = \frac{\ell}{υ_2}$ (3), όπου $υ_2$ η ταχύτητα που είχε αποκτήσει στη θέση Γ.

Επίσης $t_3 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{m_3}{k}}$ (4)

Αφού είναι $t_2 = t_3 \overset{(3)}{\underset{(4)}{\Longleftrightarrow}} \frac{\ell}{υ_2} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{m_3}{k}}$ (5).

Αρκεί να υπολογίσουμε την $υ_2$.

Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του m_2 από τη θέση που ήταν τη στιγμή που κόψαμε το νήμα μέχρι το Γ:

$$W_B + W_{N_2} + W_{N_2'} = K_{τελ} - K_{αρχ} \Leftrightarrow m_2 g \cdot h = \frac{1}{2} m_2 υ_2^2 \Leftrightarrow$$

$$υ_2^2 = 2gh = 2 \cdot 10 \cdot 1{,}8 = 36 \Rightarrow υ_2 = 6\ \frac{m}{s}$$

Έτσι, από (5) $\Rightarrow \frac{3\pi}{5 \cdot 6} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{k}} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \sqrt{\frac{5}{k}} \Leftrightarrow \frac{1}{25} = \frac{5}{k} \Leftrightarrow$

$$\boxed{k = 125\ \frac{N}{m}}$$

Δ3 Είναι $x = A \cdot ημ(ωt + φ_0)$ (6).

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_3}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \omega = 5\ \frac{rad}{s}.$$

Ενέργεια ταλάντωσης για το m_3, στη θέση κρούσης:

$$E = K + U \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A^2 = \frac{m_3}{k} \cdot (\upsilon_3')^2 + x^2 \quad (7).$$

Είναι $x = 0$, γιατί η Θ.Ι. του σώματος συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου πριν και μετά την κρούση. Επειδή η κρούση των m_2 κ' m_3 είναι κεντρική και ελαστική και αφού έχουν ίσες μάζες, αμέσως μετά την κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες.

Οπότε $\upsilon_3' = \upsilon_2 = 6\ \frac{m}{s}$.

Έτσι, από $(7) \Rightarrow A^2 = \frac{5}{125} \cdot 6^2 \Leftrightarrow A = \frac{1}{5} \cdot 6 \Rightarrow A = 1,2\ m$

Την $t = 0$ (για την α.α.τ. του m_3) είναι $x = 0$ και $\upsilon_3' < 0$, οπότε $\phi_0 = \pi$ rad.

Επομένως, $x = 1,2 \cdot ημ(5t + \pi)$

Δ4 . $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -k \cdot x \quad (8).$

$$\left|\frac{dK}{dt}\right| = \frac{|dW_{\Sigma F}|}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot |dx|}{dt} = |\Sigma F| \cdot |\upsilon| = k \cdot |x| \cdot |\upsilon| \quad (9).$$

Δίνεται ότι $K = 8 \cdot U \Leftrightarrow E - U = 8U \Leftrightarrow E = 9U \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA^2 = 9 \cdot \frac{1}{2}kx^2 \Leftrightarrow$

$$x^2 = \frac{A^2}{9} \Leftrightarrow x = \pm\frac{A}{3} \Leftrightarrow x = \pm 0,4\ m$$

Την $1^η$ φορά μετά την κρούση είναι $x = -0,4\ m$, οπότε

από $(8) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -125 \cdot (-0,4) = 50 \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt} = 50\ N}$

Για το μέτρο της ταχύτητάς του αυτή τη στιγμή,

είναι: $\upsilon^2 = \omega^2(A^2 - x^2) = 25\cdot(1{,}44 - 0{,}16) = 25\cdot 1{,}28 = 32 \Rightarrow$

$|\upsilon| = 4\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$.

Έτσι από (9) $\Rightarrow \left|\frac{dK}{dt}\right| = 125\cdot 0{,}4\cdot 4\sqrt{2} = 200\sqrt{2}\ \frac{J}{s}$.

Δ5 Η απόσταση τους είναι ίση με το διάστημα που διένυσε το Σ_2 μετά την κρούση.

Είναι $S_2 = \upsilon_2'\cdot \Delta t$.

$\Delta t = \frac{T}{2} = \pi\cdot\sqrt{\frac{m_3}{k}} = \frac{\pi}{5}\ s.$

$\upsilon_2' = \upsilon_3 = A_1\cdot\omega = 0{,}2\cdot 5 = 1\ \frac{m}{s}$.

Έτσι: $S_2 = \frac{\pi}{5}\ m$