πρόταση
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΕΠΩΝΥΜΟ:
ΟΝΟΜΑ:
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:
ΤΜΗΜΑ:
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

Λύσεις

Πανελλαδικές Εξετάσεις
Γ' Τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου
Τετάρτη 18 Μαΐου 2016

Θέμα Α

A_1. Σχολικό βιβλίο (σελ. 262) Θεωρία (απόδειξ.

A_2. Σχολικό βιβλίο (σελ. 141) Θεωρία (ορισμός)

A_3. Σχολικό βιβλίο (σελ. 246-247) Θ.Μ.Τ.

A_4. α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

Θέμα Β

B_1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=0$ ελ.

B₂. Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \frac{2\cdot(x^2+1)^2 - 2x\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1)\cdot\left[2(x^2+1) - 4x\cdot 2x\right]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	
			σ.κ		σ.κ.		

Η f παρουσιάζει σημεία καμπής τα:
$M_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $M_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$

αφού $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1} = \dfrac{\frac{3}{9}}{\frac{3}{9}+1} = \dfrac{\frac{3}{9}}{\frac{12}{9}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

και
$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{4}$

B₃. • Η f ως συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ρητή) δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

Η $y=1$ η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f

πρόταση
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΕΠΩΝΥΜΟ:
ΟΝΟΜΑ:
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:
ΤΜΗΜΑ:
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

Θέμα Γ

Γ1. Θεωρώ τη συνάρτηση:

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1$$

Παρατηρώ ότι η εξίσωση: $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει μια ρίζα προφανή την $x=0$.

Θα δείξω ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

• Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x(e^{x^2}-1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ αφού και $e^{x^2}-1=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$
$e^{x^2}-1$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Γνωρίζουμε ότι $\ln x\leq x-1$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$.

Θέτω όπου x το e^{x^2} τότε: $\ln e^{x^2}\leq e^{x^2}-1 \Leftrightarrow$

$$x^2\leq e^{x^2}-1 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$$

με την ισότητα να ισχύει για $e^{x^2}=1 \Leftrightarrow e^{x^2}=e^0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

Άρα η εξίσωση: $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$

Γ2. $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow$
$|f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1| = e^{x^2} - x^2 - 1$
Αφού $e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Όμως: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο κατά διαστήματα.
Οπότε:
- Αν $x<0$ και $f(x)>0$ τότε: $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$
- Αν $x<0$ και $f(x)<0$ τότε: $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$
- Αν $x>0$ και $f(x)>0$ τότε: $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$
- Αν $x>0$ και $f(x)<0$ τότε: $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

κι επειδή $f(0) = 0$ όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι
- $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x < 0 \end{cases} = |e^{x^2} - x^2 - 1|$, $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \geq 0 \end{cases} = -|e^{x^2} - x^2 - 1|, \ x \in \mathbb{R}$$

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$
Επειδή $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$
το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του x.
Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} - 2 =$
$= 4x^2 e^{x^2} + 2(e^{x^2} - 1) \geq 0$ κι επειδή f'' συνεχής στο $x_0 = 0$ η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Προφανής λύση η $x = 0$
Θεωρώ τη συνάρτηση:
$g(x) = f(x+3) - f(x)$, $D_g = \mathbb{R}$
$g'(x) = f'(x+3) - f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$
Αφού η f κυρτή στο $\mathbb{R}$, η $f' \uparrow \mathbb{R}$.
$x + 3 > x \overset{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x+3) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x+3) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow$
$g'(x) > 0$ άρα η $g \uparrow \mathbb{R}$

ΕΠΩΝΥΜΟ:
ΟΝΟΜΑ:
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:
ΤΜΗΜΑ:
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

Γ4 (συνέχεια)

Γ4 Έχουμε: $x>0 \Leftrightarrow$

$|\eta\mu x|<x \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$g(|\eta\mu x|)<g(x) \Leftrightarrow$

$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$

Άρα μοναδική λύση η $x=0$.

ΕΠΩΝΥΜΟ:
ΟΝΟΜΑ:
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:
ΤΜΗΜΑ:
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

Θέμα Δ

Δ1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$

Θέτω: $g(x) = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ Τότε: $f(x) = g(x)\cdot \eta\mu x,\ x\neq 0$

έτσι: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (g(x)\cdot \eta\mu x) = 1\cdot 0 = 0 = f(0)$

αφού η f ως παρ/μη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής.

• $\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x)\right)\cdot \eta\mu x\, dx = \pi$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot \eta\mu x\, dx + \int_0^{\pi} (f'(x))'\cdot \eta\mu x\, dx = \pi$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot \eta\mu x\, dx + \left[f'(x)\cdot \eta\mu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x\, dx = \pi$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot \eta\mu x\, dx - \left[f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)\cdot \eta\mu x\, dx = \pi$

$\Leftrightarrow -\left(f(\pi)\cdot \sigma\upsilon\nu\pi - f(0)\cdot \sigma\upsilon\nu 0\right) = \pi$

$\Leftrightarrow + f(\pi) = \pi.$

$1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = f'(0)$

Η f' συνεχής αφού η f δύο φορές παρ/μη στο $\mathbb{R}$

Δ_2. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$
άρα από Θ. Fermat $f'(x_0)=0$
Παραγωγίζω και τα δύο μέλη της σχέσης:

$$e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x \quad \text{έχω}$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x$$

Για $x=x_0$, $\quad e^{f(x_0)} \cdot 0 + 1 = f'(f(x_0)) \cdot 0 + e^{x_0} \Leftrightarrow$

$$1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0 \quad \text{άτοπο γιατί}$$

$$f'(0)=1$$

β) Η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ αφού είναι δύο φορές παρ/μη στο $\mathbb{R}$. $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$
Έχουμε: $f'(0) = 1 > 0$
επομένως: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ_3. Επειδή $x \to +\infty$ περιοριζόμαστε στο $[0,+\infty)$
Επειδή $x>0$ και η $f \uparrow$ τότε: $f(x) > f(0) = 0$
Επειδή $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ με $f \uparrow$ και συνεχή
τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ άρα

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x)} = \frac{2}{f(x)}$$

άρα:

$$-\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

κι επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{2}{f(x)} \right) = 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$

Από Κ.Π. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$

ΕΠΩΝΥΜΟ:
ΟΝΟΜΑ:
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:
ΤΜΗΜΑ:
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

Δ4. Θέτω: $u = \ln x$ ώστε:

$$du = \frac{1}{x} dx$$

Για $x = 1$, $u = 0$
Για $x = e^{\pi}$, $u = \pi$

$$I = \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^{\pi} f(u) du$$

όμως $0 \leq x \leq \pi$ κι επειδή $f \uparrow$

$$f(0) \leq f(x) \leq f(\pi)$$

$0 \leq f(x) \leq \pi$ με το "=" να μην ισχύει παντού

Επειδή η f συνεχής στο $[0, \pi]$:

$$0 < \int_0^{\pi} f(x) dx < \int_0^{\pi} \pi dx$$ άρα:

$$0 < \int_0^{\pi} f(x) dx < \pi^2.$$